4.2 定义和说明 2021年3月15日10点28分

区间上的复指数

是完整标准正交基.根据公式2.38,我们可以将函数的展开写作

为了方便,我们写作

其中

这被称为的**傅里叶级数**.

如果是绝对可积(),则傅里叶系数存在;如果,则部分序列和,在范数中收敛到,

**书上的一段内容备注**:咋一看与2.3.3节例题一的内容有冲突,注意这里函数 的定义域为,而不是,因此书上的结论成立.

变换变量,函数

是上的标准正交基.具有这些基函数的傅里叶级数是

傅立叶级数(公式4.3)在两方面类似于DFT(公式3.11),

函数f(x)具有周期L,则序列f[n]暗含周期N.

傅立叶级数中的傅立叶分量的频率是基波𝜈1 = 1 ∕ L的谐波。 DFT中傅立叶分量的数字频率是Δ𝜃 = 2𝜋 ∕ N的谐波.

还有两个重要的区别:

傅立叶级数具有不同频率的可数无穷大,而不是DFT仓的N个离散频率.

虽然DFT序列()是隐式周期性的,,但傅立叶系数序列不是.

“经典”傅里叶级数

考虑下列的正弦和余弦函数,

我们只需要考虑,原因是和.为了验证在区间上的正交性,我们计算内积.对于余弦,

除非,否则第一个积分为零;除非,否则第二个积分为零,这仅在时才会发生,因为.在这种情况下我们有.因此,内积为

相似地,

并且

归一化后,我们有一个从复数指数导出的新的标准正交集,它也跨越L2 [0，L]:

我们将正弦-余弦的正交展开称为经典傅立叶级数,

您可以通过以下公式证明复数系数与经典系数有关

当时情况比较特别.我们有,此时是零解，因为.

函数在任意区间上的经典傅立叶级数展开为(Mathematical Method)

函数在任意区间上的经典傅立叶级数展开为(Mathematical Method)

如果在区间上是偶函数,那么它的正弦级数系数必定为0,因此它在区间上的余弦级数和相应的系数分别为

如果在区间上是奇函数,那么它的余弦级数系数必定为0,因此它在区间上的正弦级数和相应的系数分别为

**定理4.1(Riemann–Lebesgue引理)** 令且,并且令它的傅里叶级数为(公式4.3).则,

此外,当时,我们从希尔伯特空间理论继承了Parseval的公式.稍后将显示,对于傅里叶级数,Parseval的公式为

如果,则.如果将视为中的平均功率,那么Parseval的公式就是能量守恒的陈述.无论是根据实际信号在“时域”中还是在“频域”中计算平均功率,都可以通过对傅立叶系数的平方幅度求和来获得相同的结果.在进行傅立叶表示时,没有能量错位.

平均功率可以被写作

将正频率和负频率分量分组.我们然后定义**功率谱[power spectrum]**

功率谱中的项给出了在零频率(n=0)以及基频和谐波频率下的平均功率的一部分,.也称为线谱(图4.1和4.2).Riemann-Lebesgue引理和Parseval的公式都表达了这样一个事实,即现实世界(有限平均功率)信号的功率谱最终会在高频下“滚降”.

**4.3 傅里叶级数的收敛** 2021年3月31日11点40分

**定义4.1(连续性和平滑性)** 考虑一个函数,其中和为有限.通过和,我们分别表示从下面(通过小于的值)和从上面(通过大于的值)接近f的极限.

1. 对于,如果和是有限的并且都等于,是有限的且等于,是有限的且等于,则在是**连续的**.函数在上连续的类型记为,或.
2. 如果在上除了在有限点集之外均连续,并且在这些点和上是有限的,则是**分段连续**.即,之多具有有限数量的不连续点.函数在上分段连续的类型记为.
3. 如果是分段连续且它的导数同样是分段连续的,则是**分段平滑**.在的跳跃点处,导数可以没有定义.函数在上分段平滑的类型记为.
4. 如果和它的导数都是连续的,则它是连续可微的.一个函数可以连续可微多次.函数在上次连续可微的类型记为.无穷连续可微函数的类型记为.

下面这些函数类型是重叠的(图4.5)

1. 连续函数也是分段连续的(具有单个“段”):.
2. 分段平滑函数也是分段连续的:.
3. 连续可微函数也是分段平滑:
4. 分段连续函数在有界区间上的也是有界的,平方可积,并且绝对可积:.
5. 一个次连续可微函数也是次连续可微函数:.

**定义4.2(级数的收敛)** 令是一个函数,是该函数的序列,其中,以及标记无穷级数的前N项和.

1. 如果对所有成立,则该级数**绝对收敛[converges absolutely]**.
2. 如果对所有成立,则该级数**逐点收敛[converges pointwise]**.也就是说,通过使N足够大,你可以使得误差在任意点处足够小.
3. 如果部分和与之间误差的范数趋向0,

则级数在范数上收敛到.当范数是或范数时,收敛也分别称为**均值收敛或均方收敛**.

1. 如果部分和与之间误差的上确界[supremum](均匀范数) 趋向0,

则级数**一致收敛[converges uniform]**到.

**定理4.2** 令是周期为L的分段平滑函数.令是f的傅里叶级数的前N项和.则,并且,对于所有的x,

**定理4.3** 令是周期为L的连续分段平滑函数.令是f的傅里叶级数的前N项和.则对于所有的,随绝对和一致的收敛到.

连续性增加的重要内容是傅立叶级数的绝对一致收敛.对于傅立叶级数,绝对收敛意味着

即,,这意味着傅里叶系数随衰减快于.由于的连续性，我们不仅到处都有逐点收敛性,而且我们也知道级数收敛的速度,因为我们知道傅里叶系数的渐近行为.也可以证明逆命题是正确的:**如果傅立叶级数绝对且一致地收敛,那么它收敛的函数是连续的**.

**定理4.4** 令是周期为L的函数,且.

1. 如果且是分段平滑,则随.即,傅里叶系数衰减快于.
2. 如果,则傅里叶系数衰减快于任意,其中.
3. 如果,则近似误差是有界的,,其中是常量(一致收敛).
4. 如果系数的集合是有界的,使得除外,其衰减快于(即,其中且),则傅里叶级数绝对且一致收敛到函数.

对于,是连续且分段平滑的,定理的(a)部分与定理4.3相同.通过连续微分度测得的函数越平滑,通过傅里叶系数的渐近行为(a部分)和近似误差的衰减(c部分),傅里叶级数收敛的速度就越快.当一个函数是无限连续可微的时,定理的部分(b)说,对于所有,傅立叶系数的衰减快于.最后，(d)部分是(a)部分的逆:**傅立叶系数衰减越快.所得函数越平滑**.表4.1列出了本章有关平滑度和收敛性的所有结果.

