4.2 定义和说明 2021年3月15日10点28分

区间上的复指数

是完整标准正交基.根据公式2.38,我们可以将函数的展开写作

为了方便,我们写作

其中

这被称为的**傅里叶级数**.

如果是绝对可积(),则傅里叶系数存在;如果,则部分序列和,在范数中收敛到,

变换变量,函数

是上的标准正交基.具有这些基函数的傅里叶级数是

傅立叶级数(公式4.3)在两方面类似于DFT(公式3.11),

函数f(x)具有周期L,则序列f[n]暗含周期N.

傅立叶级数中的傅立叶分量的频率是基波𝜈1 = 1 ∕ L的谐波。 DFT中傅立叶分量的数字频率是Δ𝜃 = 2𝜋 ∕ N的谐波.

还有两个重要的区别:

傅立叶级数具有不同频率的可数无穷大,而不是DFT仓的N个离散频率.

虽然DFT序列()是隐式周期性的,,但傅立叶系数序列不是.

“经典”傅里叶级数

考虑下列的正弦和余弦函数,

我们只需要考虑,原因是和.为了验证在区间上的正交性,我们计算内积.对于余弦,

除非,否则第一个积分为零;除非,否则第二个积分为零,这仅在时才会发生,因为.在这种情况下我们有.因此,内积为

相似地,

并且

归一化后,我们有一个从复数指数导出的新的标准正交集,它也跨越L2 [0，L]:

我们将正弦-余弦的正交展开称为经典傅立叶级数,

您可以通过以下公式证明复数系数与经典系数有关

当时情况比较特别.我们有,此时是零解，因为.

定理4.1(Riemann–Lebesgue引理) 令且,并且令它的傅里叶级数为(公式4.3).则,

此外，当f∈L2时，我们从希尔伯特空间理论继承了Parseval的公式.稍后将显示,对于傅里叶级数,Parseval的公式为

如果f∈L2,则（cn）∈𝓁2.如果将视为中的平均功率,那么Parseval的公式就是能量守恒的陈述.无论是根据实际信号在“时域”中还是在“频域”中计算平均功率,都可以通过对傅立叶系数的平方幅度求和来获得相同的结果.在进行傅立叶表示时,没有能量错位.

平均功率可以被写作

将正频率和负频率分量分组.我们然后定义功率谱

功率谱中的项给出了在零频率(n=0)以及基频和谐波频率下的平均功率的一部分,.也称为线谱(图4.1和4.2).Riemann-Lebesgue引理和Parseval的公式都表达了这样一个事实,即现实世界(有限平均功率)信号的功率谱最终会在高频下“滚降”.