4.2 定义和说明 2021年3月15日10点28分

区间上的复指数

是完整标准正交基.根据公式2.38,我们可以将函数的展开写作

为了方便,我们写作

其中

这被称为的**傅里叶级数**.

如果是绝对可积(),则傅里叶系数存在;如果,则部分序列和,在范数中收敛到,

**书上的一段内容备注**:咋一看与2.3.3节例题一的内容有冲突,注意这里函数的定义域为,而不是,因此书上的结论成立.同样的内容出现在5.6.2节中.

变换变量,函数

是上的标准正交基.具有这些基函数的傅里叶级数是

傅立叶级数(公式4.3)在两方面类似于DFT(公式3.11),

函数f(x)具有周期L,则序列f[n]暗含周期N.

傅立叶级数中的傅立叶分量的频率是基波𝜈1 = 1 ∕ L的谐波。 DFT中傅立叶分量的数字频率是Δ𝜃 = 2𝜋 ∕ N的谐波.

还有两个重要的区别:

傅立叶级数具有不同频率的可数无穷大,而不是DFT仓的N个离散频率.

虽然DFT序列()是隐式周期性的,,但傅立叶系数序列不是.

“经典”傅里叶级数

考虑下列的正弦和余弦函数,

我们只需要考虑,原因是和.为了验证在区间上的正交性,我们计算内积.对于余弦,

除非,否则第一个积分为零;除非,否则第二个积分为零,这仅在时才会发生,因为.在这种情况下我们有.因此,内积为

相似地,

并且

归一化后,我们有一个从复数指数导出的新的标准正交集,它也跨越L2 [0，L]:

我们将正弦-余弦的正交展开称为经典傅立叶级数,

您可以通过以下公式证明复数系数与经典系数有关

当时情况比较特别.我们有,此时是零解，因为.

函数在任意区间上的经典傅立叶级数展开为(Mathematical Method)

函数在任意区间上的经典傅立叶级数展开为(Mathematical Method)

如果在区间上是偶函数,那么它的正弦级数系数必定为0,因此它在区间上的余弦级数和相应的系数分别为

如果在区间上是奇函数,那么它的余弦级数系数必定为0,因此它在区间上的正弦级数和相应的系数分别为

**定理4.1(Riemann–Lebesgue引理)** 令且,并且令它的傅里叶级数为(公式4.3).则,

此外,当时,我们从希尔伯特空间理论继承了Parseval的公式.稍后将显示,对于傅里叶级数,Parseval的公式为

如果,则.如果将视为中的平均功率,那么Parseval的公式就是能量守恒的陈述.无论是根据实际信号在“时域”中还是在“频域”中计算平均功率,都可以通过对傅立叶系数的平方幅度求和来获得相同的结果.在进行傅立叶表示时,没有能量错位.

平均功率可以被写作

将正频率和负频率分量分组.我们然后定义**功率谱[power spectrum]**

功率谱中的项给出了在零频率(n=0)以及基频和谐波频率下的平均功率的一部分,.也称为线谱(图4.1和4.2).Riemann-Lebesgue引理和Parseval的公式都表达了这样一个事实,即现实世界(有限平均功率)信号的功率谱最终会在高频下“滚降”.

**4.3 傅里叶级数的收敛** 2021年3月31日11点40分

**定义4.1(连续性和平滑性)** 考虑一个函数,其中和为有限.通过和,我们分别表示从下面(通过小于的值)和从上面(通过大于的值)接近f的极限.

1. 对于,如果和是有限的并且都等于,是有限的且等于,是有限的且等于,则在是**连续的**.函数在上连续的类型记为,或.
2. 如果在上除了在有限点集之外均连续,并且在这些点和上是有限的,则是**分段连续**.即,之多具有有限数量的不连续点.函数在上分段连续的类型记为.
3. 如果是分段连续且它的导数同样是分段连续的,则是**分段平滑**.在的跳跃点处,导数可以没有定义.函数在上分段平滑的类型记为.
4. 如果和它的导数都是连续的,则它是连续可微的.一个函数可以连续可微多次.函数在上次连续可微的类型记为.无穷连续可微函数的类型记为.

下面这些函数类型是重叠的(图4.5)

1. 连续函数也是分段连续的(具有单个“段”):.
2. 分段平滑函数也是分段连续的:.
3. 连续可微函数也是分段平滑:
4. 分段连续函数在有界区间上的也是有界的,平方可积,并且绝对可积:.
5. 一个次连续可微函数也是次连续可微函数:.

**定义4.2(级数的收敛)** 令是一个函数,是该函数的序列,其中,以及标记无穷级数的前N项和.

1. 如果对所有成立,则该级数**绝对收敛[converges absolutely]**.
2. 如果对所有成立,则该级数**逐点收敛[converges pointwise]**.也就是说,通过使N足够大,你可以使得误差在任意点处足够小.
3. 如果部分和与之间误差的范数趋向0,

则级数在范数上收敛到.当范数是或范数时,收敛也分别称为**均值收敛或均方收敛**.

1. 如果部分和与之间误差的上确界[supremum](均匀范数) 趋向0,

则级数**一致收敛[converges uniform]**到.

**定理4.2** 令是周期为L的分段平滑函数.令是f的傅里叶级数的前N项和.则,并且,对于所有的x,

**定理4.3** 令是周期为L的连续分段平滑函数.令是的傅里叶级数的前N项和.则对于所有的,随绝对和一致的收敛到.

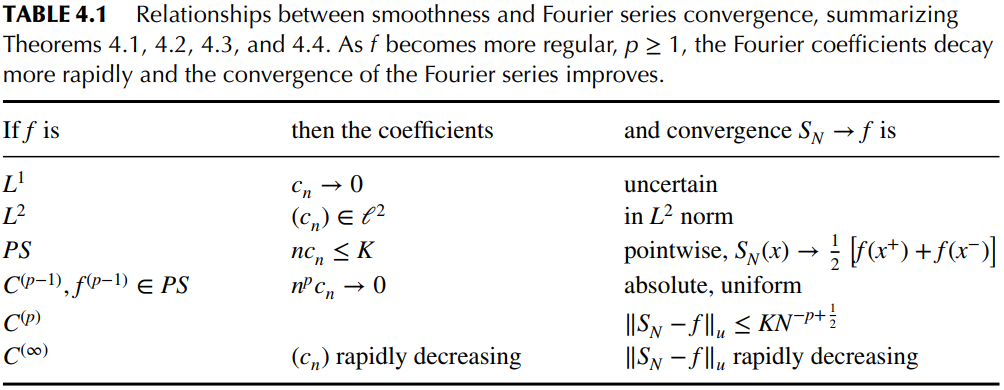
连续性增加的重要内容是傅立叶级数的绝对一致收敛.对于傅立叶级数,绝对收敛意味着

即,,这意味着傅里叶系数随衰减快于.由于的连续性，我们不仅到处都有逐点收敛性,而且我们也知道级数收敛的速度,因为我们知道傅里叶系数的渐近行为.也可以证明逆命题是正确的:**如果傅立叶级数绝对且一致地收敛,那么它收敛的函数是连续的**.

**定理4.4** 令是周期为L的函数,且.

1. 如果且是分段平滑,则随.即,傅里叶系数衰减快于.
2. 如果,则傅里叶系数衰减快于任意,其中.
3. 如果,则近似误差是有界的,,其中是常量(一致收敛).
4. 如果系数的集合是有界的,使得除外,其衰减快于(即,其中且),则傅里叶级数绝对且一致收敛到函数.

对于,是连续且分段平滑的,定理的(a)部分与定理4.3相同.通过连续微分度测得的函数越平滑,通过傅里叶系数的渐近行为(a部分)和近似误差的衰减(c部分),傅里叶级数收敛的速度就越快.当一个函数是无限连续可微的时,定理的部分(b)说,对于所有,傅立叶系数的衰减快于.最后，(d)部分是(a)部分的逆:**傅立叶系数衰减越快.所得函数越平滑**.表4.1列出了本章有关平滑度和收敛性的所有结果.



**本节最后一段内容(吉布斯现象)没看懂,需要反复阅读**.

**4.4 傅里叶级数属性和定理** 2021年4月2日09点47分

我们将使用符号表示从函数到其傅里叶系数的映射.如果具有系数的傅立叶级数收敛(在任何意义上)都收敛到f,则我们写并说函数及其系数序列是傅立叶级数对.

线性

傅立叶系数是内积,其中,内积是线性的,.傅立叶级数也具有内积形式,并且是线性的.因此,傅立叶展开是函数及其傅立叶系数之间的线性映射.

**定理4.5(线性)** 令是傅里叶级数对,并且令是常数.则

**对称性**

具有周期的函数如果则是偶函数,并且如果则是奇函数(图4.15).同样,复数序列如果也是偶数,如果则是奇数,如果则是Hermitian.

**定理4.6(傅立叶级数对称)** 令为一个函数,为其傅立叶系数.下面命题及其逆命题都为真:

如果为实函数,则傅里叶系数为Hermitian:.(**证明过程需要掌握**)

如果是偶函数(奇函数),则是偶函数(奇函数).

如果是实函数和偶函数(实函数和奇函数),则是实函数和偶函数(虚函数和奇函数).

定理4.7(Parseval) 如果分别具有复傅里叶系数和.则

并且取时,

**定理4.8(面积定理)** 令f是一个函数且是它的傅里叶系数.则,

**定理4.9(移位定理)** 令是一个傅里叶级数对.则,对于移位函数,

注意,移位不会影响傅立叶系数的大小:

因为.

**微分**

如果级数可以绝对和一致地收敛到函数f,则它同时也可以逐项微分,且微分级数收敛到的导数,

如果函数是连续且分段光滑的,则其傅里叶级数是绝对一致收敛的.可能会逐项进行微分,以产生函数导数的傅里叶级数.

**定理4.10(导数定理)** 设是连续且分段光滑,并且设其导数也是分段光滑.令为的傅立叶系数.则,的傅立叶系数由下式给出

且傅立叶级数逐点收敛(定理4.2)到.

**积分**

令函数是一个绝对可积函数,则它的积分同样也是绝对可积:

因此,也具有傅立叶级数.为了找出的傅立叶系数,将的傅立叶级数逐项正式积分:

对有界区间[0,L]的约束很重要,因此,斜坡项不会无界地增长.我们可以方便地从中减去,

第一项收敛.根据Riemann-Lebesgue引理,系数随.因此比快,从而确保收敛.总和与无关;它必须是的常数部分.

第二项是傅立叶级数.其系数的衰减也快于,使其能够逐点收敛到至少分段平滑的东西.该系列缺少常数项,因此它必须表示的非常数部分.

我们基本上证明了以下定理.

**定理4.11(积分定理)**. 设,并定义函数F为

则具有由下式给出的级数表示

其中

傅里叶级数逐点收敛到.

对于函数是绝对可积的,该定理以其最一般的形式陈述.如果另外是分段平滑的,则是连续的,并且积分序列的系数衰减至少是,从而确保绝对且一致收敛.

微分和积分与函数的平滑度及其傅里叶系数的行为之间的关系具有根本的重要性.我们已经看到,函数的平滑度是通过可以连续微分多少次来衡量的,它与傅立叶系数的衰减速率直接相关(定理4.4).这是导数定理和积分定理如何适合这张图片的方法:

1. 微分使函数不那么平滑(想一下:拐角变成跳跃).p次可微函数的导数是次可微.在傅立叶域中,微分将傅立叶系数乘以,从而降低其衰减率并增强高频分量.
2. 另一方面,积分使函数更平滑(跳跃变为拐角,拐角变为圆角).p倍可微函数的积分是次可微. 在傅立叶域中,积分将傅立叶系数除以,从而增加其衰减率并衰减高频分量.

除非函数是无限连续可微的,否则重复微分将最终使其不连续.每次微分时,傅立叶系数的衰减都较慢(n倍),直到最终傅立叶级数失去一致的收敛性.再进行一次微分,跳跃不连续点处的导数会爆炸,傅立叶系数现在是常数或随增长,并且傅立叶级数无法收敛到通常意义上的任何函数(但请参见第6章).

**卷积**

设具有周期L;卷积定义为

假设该积分存在.由于和是周期性的,因此积分可以在任意长度为L的区间内进行,而不会改变结果.像DFT一样,卷积是循环的,移位以模L解释.卷积本身是周期为L的周期,

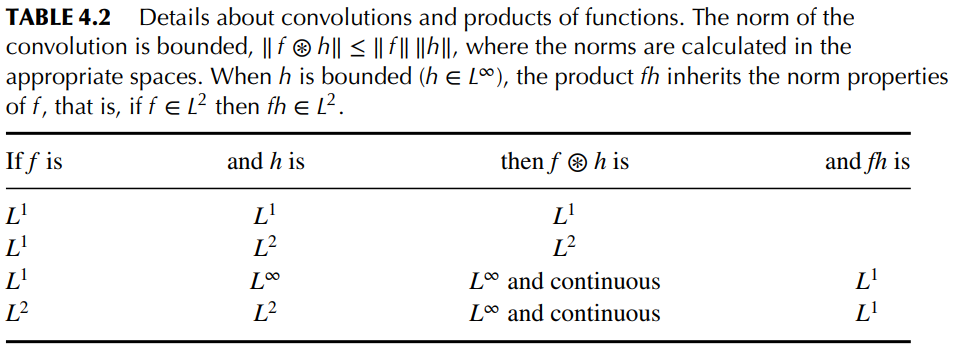
假设至少是绝对可积的(),则它具有傅里叶级数.令和分别具有傅立叶系数和.通过将卷积积分代入方程式4.3,可以正式得出卷积的傅立叶系数,

然后颠倒积分的顺序(Fubini定理),

同样,乘积是周期的,并且,如果它至少在上绝对可积,则具有傅立叶级数.要计算其傅立叶系数,用其傅立叶级数表示并将其代入公式4.3,

然后颠倒求和和积分的顺序,

该和是傅里叶系数序列和的(非循环)卷积,表示为.如果逆关系也成立,也就是说,如果和的傅立叶级数是收敛的,则我们有



为了使前向关系和为真，卷积和乘积必须至少是绝对可积的.表4.2中的表总结了主要的关注情况.它表示两个函数的卷积至少与组件函数的卷积一样好.如果他们有傅立叶级数,那么他们的卷积也是如此.这是由于积分的平滑效果.(例如,考虑两个不连续的方波的卷积是一个连续的三角波.)

在逆方向上,如果系数序列和至少是平方可加的,傅里叶级数收敛到并且收敛到.现在,如果其中一个系数序列在中,而另一个系数序列至少是有界的,则乘积(请参阅后面的表4.3).例如,和时,会发生这种情况.如果系数序列之一在中而另一个在中,则卷积.这要求或至少分段平滑,而另一个至少在中.

**定理4.12(傅里叶级数的卷积定理)** 令具有周期L和傅立叶系数.

**(a)**如果和在中,则卷积在中,其傅立叶系数为

如果f或h在中,则傅立叶级数在中收敛到.

**(b)**如果和在中,则乘积在中,其傅立叶系数由卷积和给出,

如果或是分段平滑的,则傅立叶级数在处收敛到.

4.9 离散时间傅里叶变换 2021年4月6日10点28分

傅里叶级数方程(方程式4.1)将连续时域上的一个函数关联到到离散频域上定义的另一个函数.如果交换时域和频域,则时域是离散的,而频域是连续的,则可以获得离散时间傅里叶变换(DTFT).它被定义为

我们还可以用符号表示是的傅立叶变换,或者用符号表示变换对.频率变量是第3章介绍的数字频率,以弧度/样本或仅以弧度为单位进行度量.傅立叶变换是周期性的,.

4.9.1 收敛属性 2021年4月6日11点06分

有界,有限持续时间序列的傅立叶变换是有限和,并且将始终存在.如果,则很容易看出傅立叶变换和是有界的,:

如果,部分和序列,

在范数上收敛到,

中傅立叶级数的所有结果都将转移到DTFT.如果,则.除此之外,定理4.4d将序列的衰减率与其傅里叶变换的平滑度联系起来.

1. 如果的衰减快于,则为次可连续微分,.
2. 如果,则指数序列迅速减小,并且其傅立叶变换是无限连续可微的().如果,指数序列不在中,不能进行傅立叶变换.
3. 有限序列的变换是复指数的有限和,也以表示.

定理4.4a-4.4c涵盖了逆变换的收敛性.DTFT的大多数实际应用涉及有限序列或衰减指数序列的组合,其变换始终存在并且可以无限连续地微分.另一方面,有一些重要的序列,例如,它们不是,并且它们的变换在任何通常的意义上都不会收敛.此问题将在下一章中解决.

* + 1. 定理

线性(参见定理4.5)

Parseval(参见定理4.7)

如果,则

对于DTFT,没有Riemann-Lebesgue引理,因为频域是有界的.

面积(参考定理4.8)

对于函数f和Fd的求和和积分必须存在.

对称性(参见定理4.6)

请参阅图4.16,用替换,用替换.

移位

对于无限离散序列,与DFT所使用的有限序列相比,移位是非循环的.另一方面,频率是周期性的,因为DTFT在周期中是周期性的.

定理4.13(移位) 令是DTFT对.则

有限差分（导数）

这是傅里叶级数导数定理的离散形式.

定理4.14(差分) 令是的一阶差分,定义为

一阶差分的傅里叶变换是

累加和(积分)

类似于傅立叶级数的积分定理,定义序列的累积和,

通过取的累加和可以看出,该运算是有限差分的逆函数:

我们可以将累计和写为递归,

现在让是的傅立叶变换,在递归两边进行傅立叶变换(使用移位定理):

解得

请注意,除非(常数的积分无穷大地增长),否则在时会爆炸.有了这个资格,我们有

定理4.15(积分) 设且是的傅立叶变换,设为的累加和.如果,则累积和的傅立叶变换为

比较方程式4.53和4.54并观察反比关系.在其中一个乘以,而在另一个中,您将被相除.同样比较傅立叶级数的导数定理和积分定理(方程4.22和4.23):在前者中,你乘以,而在后者中,您除以.

卷积

序列和的卷积定义为

其中总和收敛.在离散卷积的应用中,例如信号处理,经常会发生和为有限持续时间或为单边的情况.如果具有有限的持续时间,,则卷积是一个有限和,

如果和有界,则显然对所有有界.如果和是单边的,,则卷积也是一个有限和,

但是在或上没有附加条件的情况下,不能保证在的情况下有界.

我们可以像傅立叶级数那样正式得出卷积和乘积关系.对于卷积,将卷积和代入傅立叶变换的定义中(公式4.44),

并颠倒求和顺序,

对于乘积,将表示为傅立叶逆变换,,并将其代入前向变换,

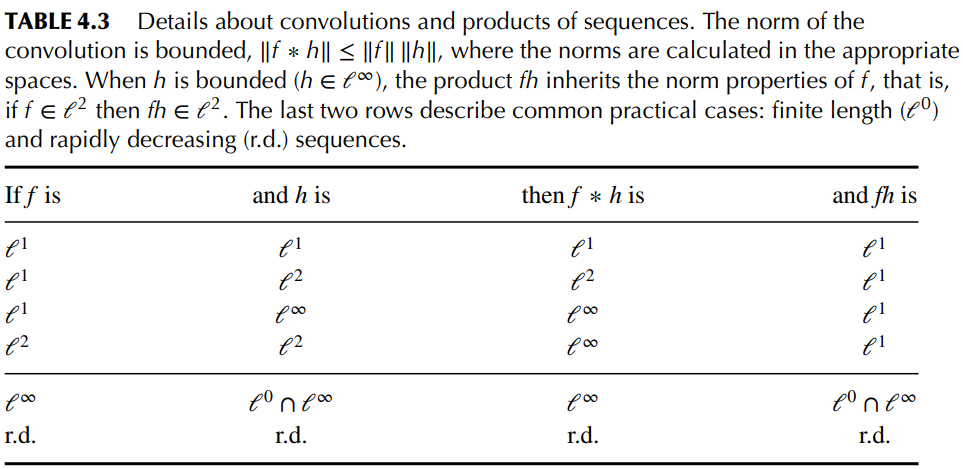
然后颠倒求和和积分的顺序,

假设逆关系也成立,我们有两个变换对,

当然,我们必须确定和上的条件,在这些条件下卷积和收敛并且变换结果有效.这些总结在下面的表4.3中.

空间是嵌套的,(与空间的嵌套相反).该表表明,两个序列的乘积至少与它的因子一样好.和的平方可加性足以确保它们及其乘积具有傅立叶变换.此外,和是有界且连续的(表4.2).因此,逆变换也存在.

另一方面,卷积并不比或好,并且可能更糟.和平方可加性还不够好,因为这给出的卷积仅是有界的,不能保证迅速衰减到足以进行傅立叶变换.如果并不比平方可加性更好,则必须绝对可加,以使和可变换.在这些条件下,乘积将至少是绝对可积的(表4.2),并且还将存在逆变换.



定理4.16(卷积) 令和为DTFT对.

1. 如果和,则,,并且.
2. 如果,则,,并且.

迅速减少的序列是绝对可加的,并且被该定理所涵盖.另外,当f和h快速减小时,它们的傅立叶变换Fd和Hd可以无限连续地微分.它们的乘积FdHd也是如此,因此,逆变换f ∗ h存在并且正在迅速减小.相反,卷积Fd ∗ Hd是无限连续可微的,并且其逆变换fh迅速减小.

**膨胀:上采样和下采样**

线性和移位定理告诉我们,当序列按幅度缩放以及沿时间轴平移时,傅立叶变换会发生什么. 知道当通过缩放时间轴来拉伸或压缩函数时傅立叶变换会发生什么也是很有意义的.这称为**膨胀**.

连续变量的函数的膨胀记为,其中为常数.当时,函数被拉伸,并且,它被压缩.对于离散时间信号(序列),仅当为整数时,表达式才有意义.对于(压缩),这意味着也必须是一个整数,此后我们将其称为.然后考虑序列.的值是,的值是,的值是,依此类推.也就是说,通过从f中选择每第P个样本来压缩序列,例如,对于P=3,

这也称为**下采样[downsampling]**.下采样的序列表示为:

在相反的情况下,(拉伸),仅当为有理数时,我们才能使成为整数,然后仅对某个. 设.对于的值,只有它是p的整数倍时,我们才能得到整数.序列在处是,在处是,在的值是,依此类推.所有其他值,例如,无法从原始序列中获得,并将其设置为零.通过在每个原始样本之间插入个零来完成的拉伸,例如,对于P=3,

这称为**上采样[upsampling]**.上采样的序列表示为:

在信号处理中经常采用对上采样和下采样的另一种解释.假设原始序列是通过以采样区间T采样连续时间信号获得的,即.如果要在中实时插入零,则必须保持原始值的时间区间.上采样序列的采样间隔必须减小到.采样率从增加到.如果要实时从中删除样本,我们还必须保持样本之间的原始时间区间.其余样本的间距为;采样率从降低到.

上采样序列的傅立叶变换为

在时域中进行拉伸会导致频域中的压缩.是将的个周期压缩到区间[-𝜋，𝜋]上（图4.35）.

下采样序列的傅立叶变换为

引入comb顺序(公式3.8),

然后(这很微妙-扩展几个项),

离散时间comb函数具有傅立叶表示(请参见推导的问题),

使用这个,

因为,所以求和的顺序可以颠倒:

通过因子下采样会导致傅立叶域中的因子拉伸,从而使傅立叶变换在周期内保持周期性（图4.35）.除非限制为,否则这可能导致混叠.这是有道理的,因为按进行的下采样会丢弃采样,并有效地延长了从到的采样间隔.相应地,奈奎斯特频率从降低到.

在下列定理中总结了上述推导.

定理4.17(膨胀) 令为DTFT对.令为整数.则

* + 1. 离散时间系统 2021年4月6日17点08分

DTFT的最常见应用是对离散时间线性,时不变(LTI)系统的分析.这些是通过具有常数系数的线性差分方程建模的,

序列f是输入或驱动函数,序列是输出或响应.可能存在指定值的初始条件.我们只对初始条件为零的情况感兴趣.

从数学上讲,没有什么可以阻止差分方程也具有k> 0的形式为b-kf [n + k]的项，但是服从该方程的物理系统将具有预测其输入并产生响应的能力 在接受任何刺激之前。 据说这样的系统是无因果的。 我们将注意力集中在因果系统上，由方程4.62所给出形式的差分方程来描述。 当输入为单位样本𝛿 [n]且初始条件为零时，离散时间LTI系统通过其响应进行分类。 这称为单位样本响应或脉冲响应，通常表示为h。

本节内容看不懂,延后再看.

* + 1. 计算DTFT 2021年4月6日17点58分

分析:计算傅立叶变换

我们从公式(4.44a)开始,

我们以区间对数字频率进行采样,得出

除极限外,总和看起来像DFT.实际上,我们不能求和无穷大,而必须将截断为向量,我们将其表示为.这样,傅立叶变换近似为,

合成:逆傅立叶变换

要反转傅立叶变换,我们必须计算积分

将其与傅立叶级数进行比较,值可以解释为周期函数的傅立叶系数.按照导致公式4.41的相同步骤,我们获得

采样并计算逆DFT的结果是周期为的的复制.为避免此复制引起的错误,必须选择足够大,使得对于时相比足够小.则,从下列公式估计,

将是的一个很好的近似值,其中.实际上,选择合适的可能需要反复试验.